

LYCEE 2/3/34	<i>Devoir de Contrôle 1</i>	RJAIBI
9/11/2015	<i>Durée : 2h</i>	4 SC 2

EXERCICE 01(3points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** avec justification

1./Si pour tout réel x strictement négatif, on a : $|f(x) - 3| \leq -\frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

2./Soit a un nombre complexe, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 2013$ est un cercle

3./ On considère la suite (t_n) définie sur \mathbb{N} par $t_n = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \times \dots \times 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 3$

EXERCICE 02(5points)

A.) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si} \\ x^3 + x + 1 & \text{si} \end{cases}$

1. /Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $x > 0$

2. /a. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2 \leq 0$

b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

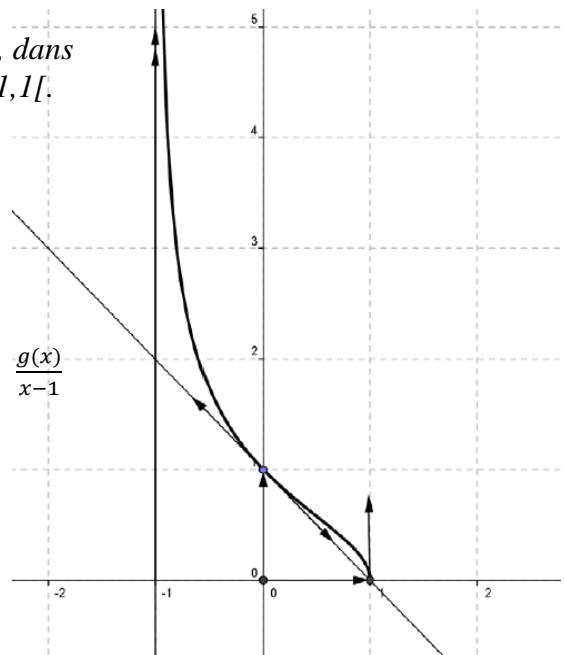
c. Montrer que f est continue en 0

3. /a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]\infty, 0[$ et vérifier que $-0,7 < x_0 < -0,6$

B.) La figure ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction g définie sur $]-1, 1[$.

Sur cette courbe est indiqué la tangente T à (C_g) au point d'abscisse 0, la demi tangente au point d'abscisse 1 et l'asymptote verticale.



En utilisant le graphique :

1. / Déterminer : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{x-1}$

2. / Ecrire l'équation de T

3. / Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f \circ g(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{g \circ f(x)}{x}$

EXERCICE 03(6points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1./ a. Calculer U_1 et U_2

b. Montrer, par récurrence, que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < U_n < 3$

c/ Montrer que (U_n) est croissante. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite

2./ Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c. Calculer la limite de (U_n)

3./ On considère la suite (W_n) définie sur \mathbb{N} par $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = 1 - V_n$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$

c. Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$

EXERCICE 04(6points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , (unité graphique 4cm), on donne les points $A(2i)$, $B(i)$, $C(-1+i)$ et $D(1+i)$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice

1./ Soit l'application $f : P \setminus \{B\} \rightarrow P$, tel que $z' = i \frac{z-2i}{z-i}$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

Déterminer l'affixe du point A' image de A par f

2./ a. Montrer que pour tout $z \neq i$, $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$

3./ a. Montrer que $(z'-i)(z-i) = 1$ pour tout $z \neq i$

b. En déduire que $BM \times BM' = 1$

c. Soit (C) le cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Déterminer et construire son image par l'application f

4/ Déterminer et construire l'ensemble (F) des points $M(z)$ tel que z' soit réel

Bon Travail